(1)

سلم تصحيح مسألة مقررة

نظرية المعادلات التفاضلية

السنة الرابعة - رياضيات - (تحليل عقدي)

2017/2016 / 5.7.2017

عدد الأوراق (6)

د. ... الحلبي

حل السؤال الأول:

20

لبرهان وحدانية الحل نفرض جدلاً أنه يوجد بالإضافة إلى الحل $W(z)$ حل آخر $W_1(z)$ ويحقق الشرط الابتدائي (2)، والمطلوب: دون أن نثبت أن:

$$W_1 = W$$ (1)

أولاً: لدينا من الفرض: $W_1(z)$ حل، أي يحقق المعادلة (1)، هذا يعني أن: (2)

$$W_1(z) = W_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, W_1(z))\, dz \quad \text{--- (1)}$$

ولدينا سابقاً الحل $W(z)$ هو: (2)

$$W(z) = W_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, W(z))\, dz \quad \text{--- (2)}$$

الآن بطرح (2) من (1) نجد أن: (3)

$$W_1(z) - W(z) = \int_{z_0}^{z} \left[f(z, W_1) - f(z, W) \right] dz$$

وباستخدام خواص التكامل نجد أن: (3)

$$\left| W_1(z) - W(z) \right| = \left| \int_{z_0}^{z} \left[f(z, W_1) - f(z, W) \right] dz \right| \leq$$

تابع الصفحة

$$\le A\int_{z_0}^{z} |w_1 - w|\,|dz| \quad \text{--- (3)}$$

لكن إذا رمزنا بـ E للقيمة العظمى للمقدار $|w_1 - w|$ في المنطقة $|z - z_0| \le \alpha$ لجميع z فمن أنه بتكرار العملية

فإن:

$$\Rightarrow |w_1 - w| \le A\int_{z_0}^{z} E\,|dz| = EA|z - z_0|$$

ثم بالتعويض في المتباينة (3)

$$\Rightarrow |w_1 - w| \le A\int_{z_0}^{z} EA|z - z_0|\,|dz| = EA^2\int_{z_0}^{z} |z - z_0|\,|dz| = EA^2\frac{|z - z_0|^2}{2!}$$

وبتكرار هذه العملية نحصل على

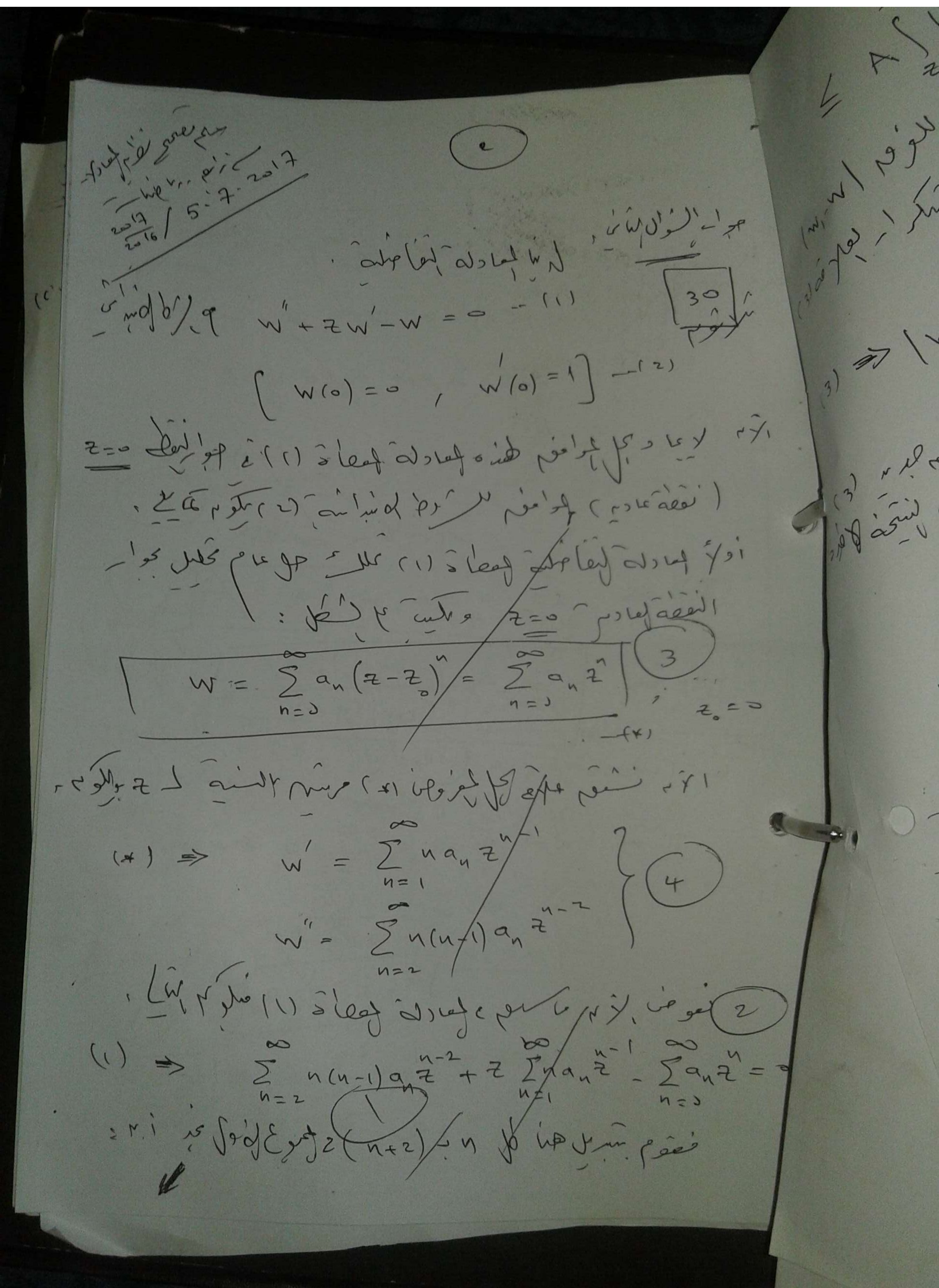
$$|w_1 - w| \le EA^n\frac{|z - z_0|^n}{n!} \quad \text{--- (4)}$$

وعندما تسعى $n \to \infty$ فإن الطرف الأيمن في (4) يسعى إلى الصفر [وبالتالي]

$$|w_1 - w| = 0 \Rightarrow w_1 = w$$

أي أنه لا يوجد أكثر من حل واحد للمعادلة التفاضلية (1) وهو w يحقق المعادلة ويأخذ القيمة w_0 عندما $z = z_0$

وهو المطلوب



2017/2016 / 5.7.2017

جواب السؤال الثاني

30 درجة

لدينا المعادلة التفاضلية:

$$w'' + zw' - w = 0 \quad \text{---}(1)$$

$$\left[\, w(0) = 0 \;,\; w'(0) = 1 \,\right] \quad \text{---}(2)$$

أولاً: لإيجاد حل المرافق هذه المعادلة المعطاة (1) في جوار النقطة $z=0$ (نقطة عادية) المرافق للشروط الابتدائية (2) نكون كما يلي:

أولاً المعادلة التفاضلية المعطاة (1) تملك حل عام تحليلي بجوار النقطة العادية $z=0$ ويكتب بالشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;,\quad z_0 = 0 \quad \text{---}(*)$$

3

ثانياً: نشتق طرفي الحل المفروض (*) مرتين بالنسبة لـ z بالتوالي:

$$(*) \Rightarrow \quad w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

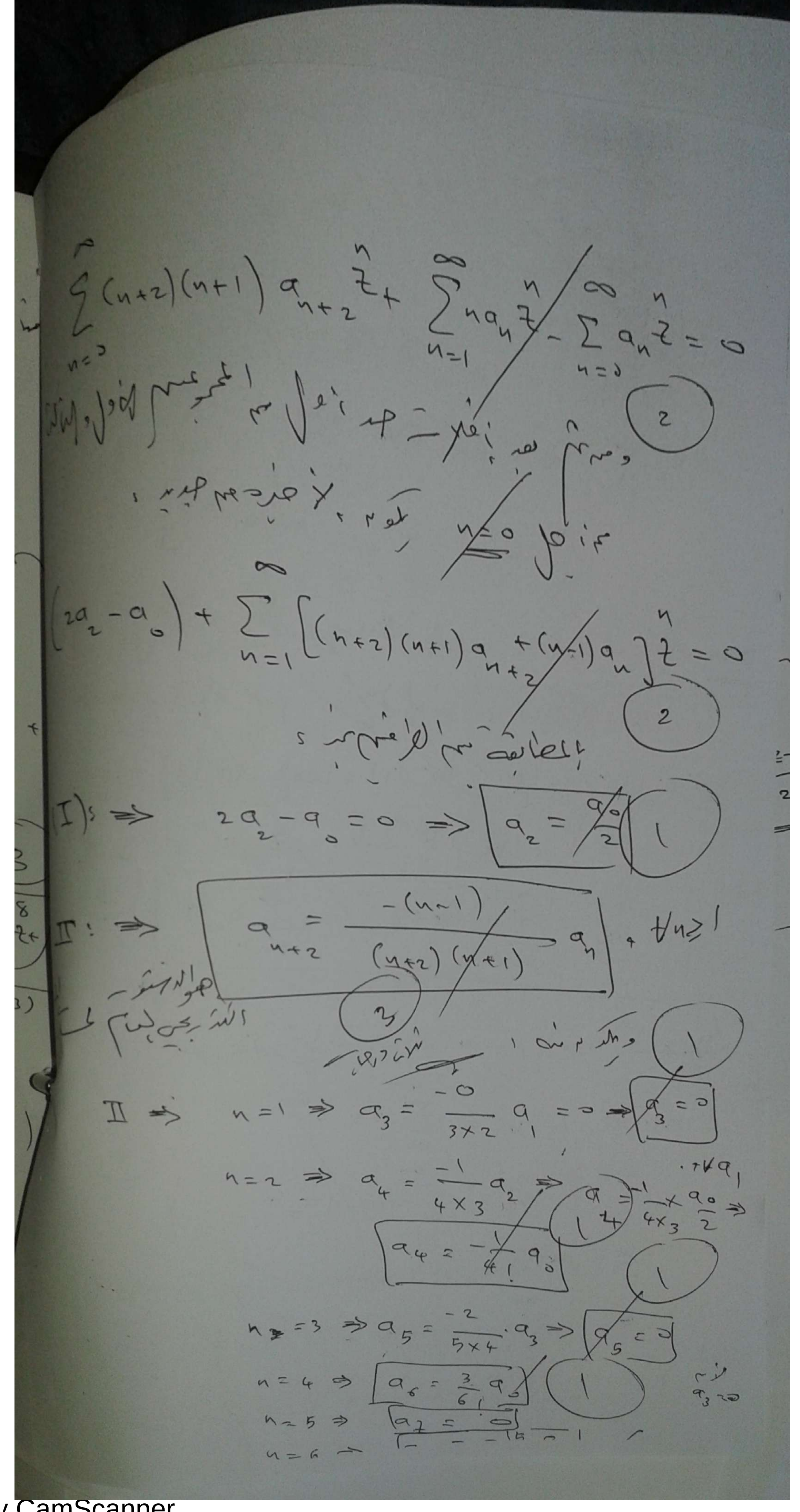
4

2 نعوض الأخيرتين في المعادلة المعطاة (1) فنكون لدينا:

$$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

1

فنقوم بتبديل هنا كل n بـ $(n+2)$ في المجموع الأول فنجد:



$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \quad (2)$$

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n\right]z^n = 0 \quad (2)$$

بالمطابقة بين الطرفين

$(I) \Rightarrow 2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_0}{2}}$ (1)

$(II) \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{-(n-1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n}, \ \forall n \geq 1$ (3)

وهكذا (1)

$II \Rightarrow n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{-0}{3\times 2} a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$

$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-1}{4\times 3} a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{-1}{4\times 3} \times \frac{a_0}{2} \Rightarrow$ (1)

$\boxed{a_4 = -\frac{1}{4!} a_0}$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{-2}{5\times 4} \cdot a_3 \Rightarrow \boxed{a_5 = 0}$ (1)

$n=4 \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{3}{6!} a_0}$ (1)

$n=5 \Rightarrow \boxed{a_7 = 0}$

$n=6 \rightarrow$

(3)

وهكذا ... وبالحل العام (W) ...

التعامل مع المعادلة هو :

$$W = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

ومن التعويض :

$$W = a_0 + a_1 z + \frac{a_0}{2} z^2 - \frac{1}{4!} a_0 z^4 + \frac{3}{6!} a_0 z^6 - \frac{15}{8!} a_0 z^8 + \dots$$

(3) ومنه يكون الحل العام بالشكل :

$$W = a_1 z + a_0 \left(1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4!} z^4 + \frac{3}{6!} z^6 - \frac{15}{8!} z^8 + \dots\right) \quad \dots (3)$$

وعلينا : a_0 و a_1

لتحقيق الحل الخاص :

$$W(0) = 0 \;\Rightarrow\; a_0 (1 + 0 + 0 + 0 + \dots) = 0$$

$$a_0 = 0$$

أما a_1

$$W' = a_1 + a_0 \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \dots\right)$$

$$W'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = a_1 + a_0 (0 + 0 + 0 + \dots)$$

$$a_1 = 1$$

$$W = z$$

4

5-7-2017

جواب السؤال الثالث: لايجاد الحل العام بجوار نقطة اللانهاية $z=\infty$ نعمل الآتي:

25

المعادلة: $$z^4 w'' + 2z^3 w' + w = 0 \quad \text{---(1)}$$

نفرض تحويل $z = \frac{1}{t}$ (2)

وبالتعويض ... $t = \frac{1}{z}$

ومنه الاشتقاق لـ t بالنسبة لـ z:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -t^2$$ (2)

حسب تعويض المعادلة بعد القسمة على z^4 :

$$(1) \Rightarrow \quad w'' + \frac{2}{z} w' + \frac{1}{z^4} w = 0$$

وبتعويض اشتقاقات w' و w'' :

(2)

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{dw}{dt}(-t^2) = -t^2 w'_t$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dt}(-t^2 w'_t) \cdot \frac{dt}{dz} = [-2t w'_t - t^2 w''_t] \cdot (-t^2)$$

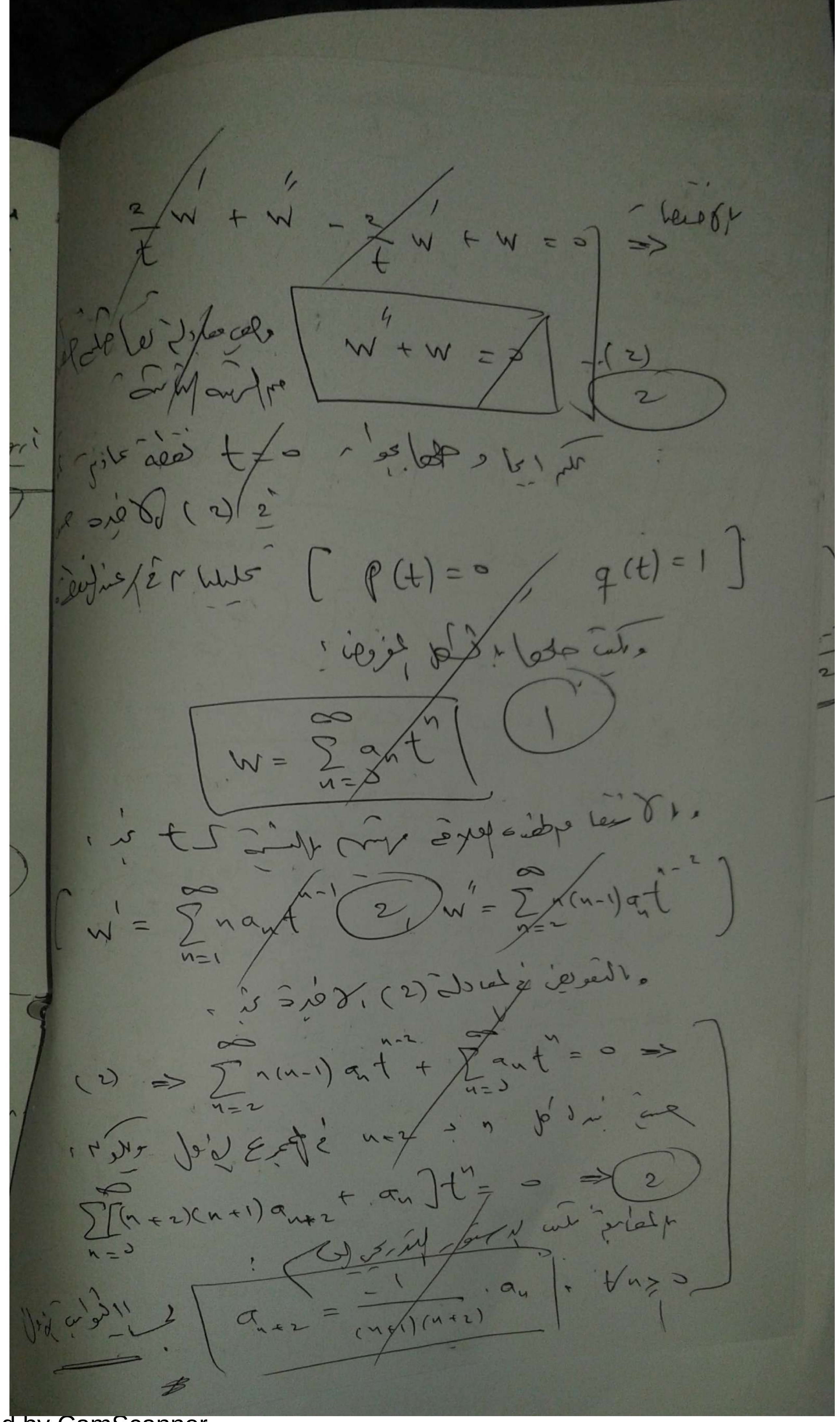
(3)

$$= +2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2} = 2t^3 w'_t + t^4 w''_t$$

حيث نعتبر $\frac{dw}{dt} = w'$ ، $\frac{d^2w}{dt^2} = w''$ [illegible]

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{t^4}(2t^3 w' + t^4 w'') + \frac{2}{t^3}(-t^2 w') + w = 0 \Rightarrow$$ (2)



بالتعويض في (2):

$$\frac{2}{t}w' + w'' - \frac{2}{t}w' + w = 0 \Rightarrow$$

وهي معادلة لها حل من المرتبة الثانية

$$\boxed{w'' + w = 0} \quad (2)$$

نقطة عادية $t \neq 0$ ... لأنها وحيدة

$$[\; p(t) = 0 \qquad q(t) = 1 \;]$$

ونكتب حلها بالشكل المفروض:

$$\boxed{w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n} \quad (1)$$

والآن نشتق بالنسبة لـ t نجد:

$$\left[\; w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad (2), \quad w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \;\right]$$

بالتعويض في المعادلة (2) الأخيرة نجد:

$$(2) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow$$

نبدل n بـ $n+2$ في المجموع الأول:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right] t^n = 0 \Rightarrow (2)$$

ومنه العلاقة التدريجية:

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \cdot a_n} \quad , \forall n \geq 0$$

[illegible]

5

$n=0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} a_0$

$n=1 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6} a_1$

$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{3\times 4} \cdot a_2 = \frac{1}{4!} a_0$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5!} a_1$

$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{1}{6!} a_0$

$n=5 \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{7!} a_1$

⋮

وهكذا ...

نستنتج أن :

- $a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a_0 \quad , n = 0, 1, \ldots$
- $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} a_1 \quad , n = 0, 1, \ldots$

والحل العام يكون :

$$w = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} t^{2n} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

أو

$$w = a_0 \cos t + a_1 \sin t$$

$$w = a_0 \cos \frac{1}{z} + a_1 \sin \frac{1}{z}$$

5.7.2017

2017/2016

2016/2017 — 5-7-2017

6

جـ4 / السؤال الرابع: نستخرج دالة غرين لمسألة الحدية:

25

$$y'' - y = f(x) \quad ---(1)$$

حيث $y(x)$ محدود عندما $x \in (-\infty, +\infty)$

الحل: الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هو من الشكل:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x} \quad ---(2)$$

4

نلاحظ أن الحل الأول $y_1 = e^{x}$ محدود عندما $x \to -\infty$

والحل الثاني $y_2 = e^{-x}$ محدود عندما $x \to +\infty$

2

تحقق الشرط الحدي الأول.

لذلك فدالة غرين لمسألة الحدية هنا تكتب بالشكل:

1

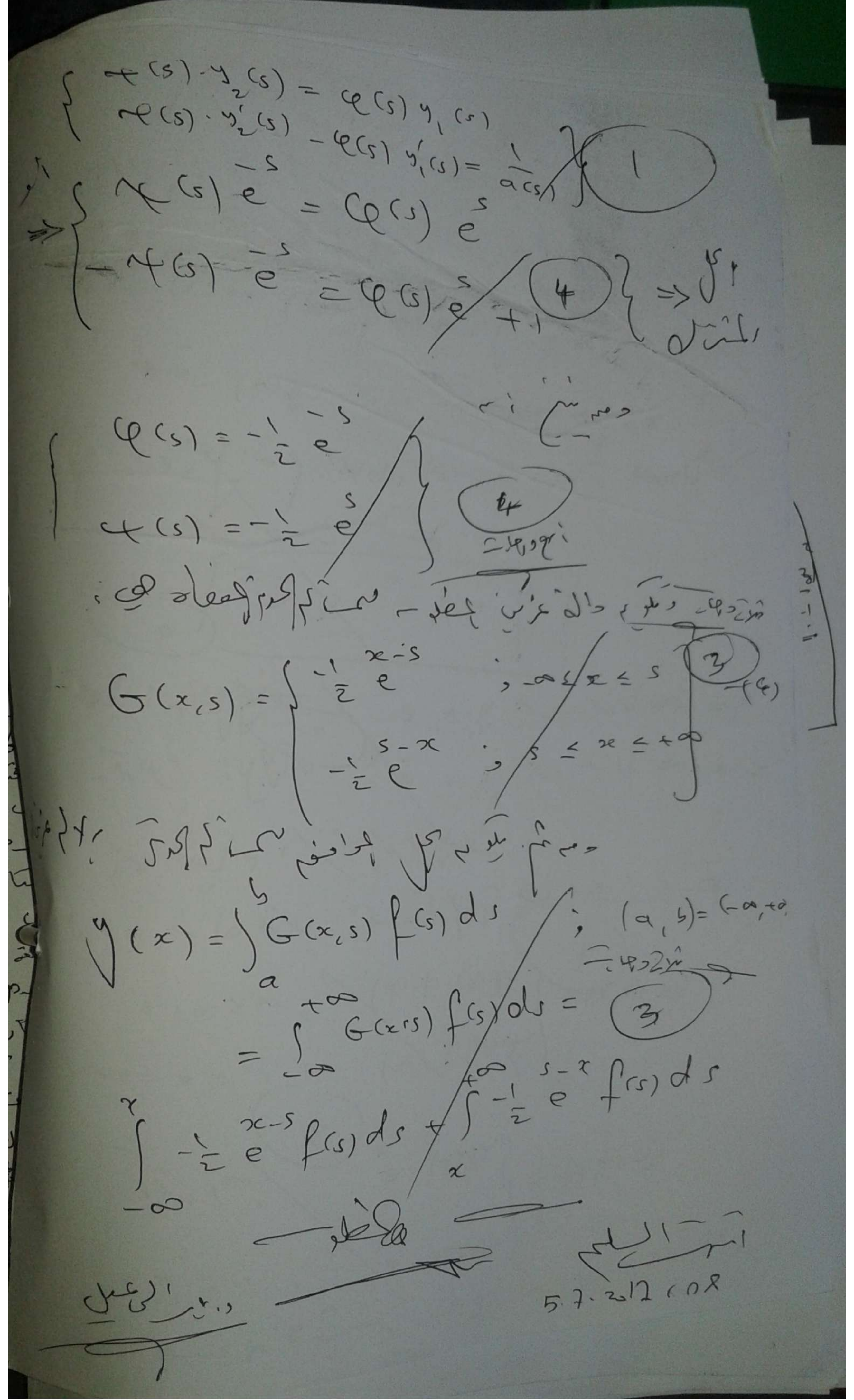
$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\, y_1(x) & , -\infty \le x \le s \\ \psi(s)\, y_2(x) & , s \le x \le +\infty \end{cases}$$

3

ومنه

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s) \cdot e^{x} & , -\infty \le x \le s \\ \psi(s) \cdot e^{-x} & , s \le x \le +\infty \end{cases}$$

حيث أن الثابت $\varphi(s)$ و $\psi(s)$ نحسبها



$$\begin{cases} \psi(s)\cdot y_2(s) = \varphi(s)\, y_1(s) \\ \psi(s)\cdot y_2'(s) - \varphi(s)\, y_1'(s) = \frac{1}{a(s)} \end{cases}$$

1

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^{s} \\ -\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^{s} + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

4

$$\begin{cases} \varphi(s) = -\frac{1}{2} e^{-s} \\ \psi(s) = -\frac{1}{2} e^{s} \end{cases}$$

4

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s} & ; -\infty \le x \le s \\ -\frac{1}{2} e^{s-x} & ; s \le x \le +\infty \end{cases}$$

3

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds \quad ; (a,b) = (-\infty, +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s) f(s)\, ds =$$

3

$$\int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{2} e^{x-s} f(s)\, ds + \int_{x}^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{s-x} f(s)\, ds$$

5.7.2012